EXERCÍCIOS PARA A FIXAÇÃO DE CONTEÚDOS

Você pode, e deve, realizar os exercícios aqui listados em grupo, com consulta a internet, ao monitor, e ao professor. Estes exercícios não contabilizam presenças nem contam notas para a sua média da disciplina. São exercícios para fização do conteúdo e para o seu aprendizado particular.

Você deverá entregar as respostas usando o Microsoft Word (.docx) com todas a fórmulas, variáveis e operadores definidos com o uso do Microsoft Word Equation Writer. Alternativamente você poderá utilizar o Latex (https://www.overleaf.com/) e enviar as respostas no formato .tex.

Estes exercícios foram gentilmente cedidos pela Profa. Cristina Versoça Perez Barrios de Souza.

MATERIAL UTILIZADO

Apenas o material apresentado em aula e o livro texto, buscas na internet e consultas a seus colegas de classe e ao professor.

1. Considere a interpretação w onde o $V(p) \equiv F$, $V(q) \equiv T$ e $V(r) \equiv T$. Determine se a interpretação w satisfaz, ou não, as seguintes fórmulas.

a) $(\neg p \lor \neg q) \rightarrow (p \lor \neg r)$
b) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \land r$
c) $\neg(\neg p \rightarrow q \land \neg r)$

Solução: Dada interpretação $V(p) \equiv F$, $V(q) \equiv T$ e $V(r) \equiv T$.

a) Não Satifaz a $(\neg p \lor \neg q) \rightarrow (p \lor \neg r)$.

p	q	r	$(\neg p \lor \neg q)$	$(p \lor \neg r)$	$(\neg p \lor \neg q) \rightarrow (p \lor \neg r)$
F	T	T	T	F	F

b) Satisfaz a $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \land r$.

p	q	r	$(\neg p \rightarrow \neg q)$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \land r$	$\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \land r$
F	T	T	F	F	T

c) Satisfaz a $\neg(\neg p \rightarrow q \land \neg r)$.

p	q	r	$(q \land \neg r)$	$(\neg p \rightarrow q \land \neg r)$	$\neg(\neg p \rightarrow q \land \neg r)$
F	T	T	F	F	T

2. Determine a tabela verdade das seguintes fórmulas, se possível.

a) $(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow \neg q)$
b) $(\neg p \lor q) \land (q \rightarrow \neg q \land \neg p) \land (p \lor r)$
c) $p \land \neg q \rightarrow p \land q$

Solução:

a) $(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow \neg q)$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow \neg q)$

T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

b) $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow \neg q \wedge \neg p) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$(\neg p \vee q)$	$(\neg q \wedge \neg p)$	$(q \rightarrow \neg q \wedge \neg p)$	$(p \vee r)$	$(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow \neg q \wedge \neg p) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	F	F	T	F
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F

c) $p \wedge \neg q \rightarrow p \wedge q$

p	q	$p \wedge \neg q$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q \rightarrow p \wedge q$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

3. Determine se as expressões a seguir são logicamente equivalentes.

a) $p \rightarrow (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p$
b) $(\neg p \vee q) \wedge (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow (p \vee r)$
c) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee q$
d) $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

Solução

a) São equivalentes: $p \rightarrow (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

p	q	$(q \wedge \neg q)$	$p \rightarrow (q \wedge \neg q)$	$\neg p$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

b) **Não são equivalentes:** $(\neg p \lor q) \land (q \land \neg p) \Leftrightarrow (p \lor r)$

p	q	r	$(\neg p \lor q)$	$(q \land \neg p)$	$(\neg p \lor q) \land (q \land \neg p)$	$(p \lor r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F

c) **Não são equivalentes:** $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \land r) \lor q$

p	q	r	$(q \land r)$	$p \lor (q \land r)$	$(p \land r)$	$(p \land r) \lor q$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

d) **Não são equivalentes:** $(p \land \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

p	q	$(p \land \neg q)$	$\neg(p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	F	F

4. **Considerando as fórmulas a seguir, determine se elas são válidas, satisfatíveis ou insatisfatíveis, tautológicas, contraditórias ou contingente.**

a) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((r \rightarrow q))$
b) $(p \land q) \lor (\neg q \land \neg p)$
c) $(\neg p \rightarrow q) \lor ((p \land \neg r) \leftrightarrow q)$
d) $(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow \neg q)$

Solução:

a) Satisfátivel em todas as interpretações exceto C e G, não é válida, tautológica, insatisfatível ou contraditória. É, sem dúvida, contingente.

	p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$((r \rightarrow q))$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((r \rightarrow q))$
A	T	T	T	T	T	T	T
B	T	T	F	F	F	T	T
C	T	F	T	T	T	F	F
D	T	F	F	T	T	T	T
E	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T
G	F	F	T	T	T	F	F
H	F	F	F	T	T	T	T

b) Satisfátivel em a e d, não é tautológica, nem contraditória, nem valida nem insatisfatível. É contingente.

	p	q	$(p \wedge q)$	$(\neg q \wedge \neg p)$	$(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
A	T	T	T	F	T
B	T	F	F	F	F
C	F	T	F	F	F
D	F	F	F	T	T

c) É satisfátivel em todas as interpretações, tautológica e válida. Não é insatisfatível nem contingente.

p	q	r	$(\neg p \rightarrow q)$	$(p \wedge \neg r)$	$((p \wedge \neg r) \leftrightarrow q)$	$(\neg p \rightarrow q) \vee ((p \wedge \neg r) \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T

5. Considere uma linguagem proposicional onde p signifique "Sandra é feliz"; q signifique "Patrícia pinta quadros" e r signifique "Amélia é feliz". Formalize as seguintes sequências:

- **a) Se Sandra é feliz, então Amélia é feliz.**
- **b) Se Sandra não é feliz, então Patrícia não pinta quadros.**
- **c) Já que Sandra e Amélia são felizes, então Patrícia pinta quadros.**
- **d) Quando Patrícia pinta quadros e Amélia não é feliz Sandra também não é.**

Solução:

- **a)** $p \rightarrow r$
- **b)** $\neg p \rightarrow \neg q$
- **c)** $(p \wedge r) \rightarrow q$
- **d)** $(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$

6. Beatriz, encontrou os baús A e B em uma caverna. Ela conhece a lenda destes baús e sabe que um contém um tesouro e o outro uma maldição. No baú A está escrito: "Ao menos um destes baús contém um tesouro". Enquanto isso no baú B está escrito: "No baú A existe uma maldição". Beatriz também sabe que ou as duas inscrições são verdadeiras ou as duas são falsas. Será possível encontrar o tesouro? Se sim, qual baú Beatriz deve abrir?

Solução:

Considere uma linguagem proposicional onde p representa "baú A contém o tesouro" e q representa baú B contém o tesouro"

Neste ponto podemos afirmar que ¬p significa "baú A contém uma maldição" e que ¬q significa "Baú B contém uma maldição." Apenas um contém o tesouro. Apenas um contém a maldição.

Podemos formalizar o conhecimento de Beatriz:

- i. **"Ao menos um destes baús contém um tesouro" ou seja,** $p \vee q$**;**
- ii. **"O Baú A contém uma maldição" ou seja,** $\neg p$
- iii. **"Ou as duas inscrições são verdadeiras ou falsas", ou seja** $(p \vee q) \leftrightarrow \neg p$

Precisamos verificar existe alguma interpretação que satisfaz $(p \vee q) \leftrightarrow \neg p$ e você pode usar uma tabela verdade para isso.

	p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \leftrightarrow \neg p$
A	T	T	T	F	F
B	T	F	T	F	F
C	F	T	T	T	T
D	F	F	F	T	F

Na interpretação c, onde $V(p) \equiv F$ e $V(q) \equiv T$ a fórmula $(p \vee q) \leftrightarrow \neg p$ está satisfeita. Então, Beatriz pode abrir os baús. Como decidimos que p indicando que o baú A contém o tesouro e nessa interpretação temos $V(p) \equiv F$ podemos afirmar que o baú B contém o tesouro.

7. **Sem utilizar uma tabela verdade, reduza as seguinte fórmulas a forma normal conjuntiva.**

   a) $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$
   b) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
   c) $\neg((((p \rightarrow q)) \rightarrow p) \rightarrow a)$

Solução:

a) **Considerando** $\neg(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{r} \rightarrow \neg \boldsymbol{s})$ **teremos**

i. $\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee \neg s)$ **(Distributiva da Negação)**
ii. $(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee \neg s)$ **(Retiramos a negação dupla)**
iii. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee \neg s)$ **(Distributiva da Disjunção)**
iv. $(p \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg q \vee (\neg r \vee \neg s))$ **(Forma Normal Conjuntiva)**

b) **Considerando** $(\neg \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{r})$ **teremos:**

i. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ **(Usando a equivalência a disjunção)**
ii. $(\neg\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ **(Usando a equivalência a conjunção)**
iii. $\neg((p \vee q) \wedge \neg(\neg q \vee \neg r))$

c) **Considerando** $\neg((((\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})) \rightarrow \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{a})$ **teremos:**

i. $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow a)$ **(Usando a equivalência a conjunção)**
ii. $\neg((\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow p) \rightarrow a)$ **(Usando a equivalência a disjunção)**
iii. $\neg\big((\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg p) \vee a\big)$**(Usando De Morgan)**
iv. $(\neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg p) \wedge \ \neg a)$ **(Usando De Morgan)**
v. $((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge \ \neg a)$

8. **Sem utilizar uma tabela verdade, reduza as seguintes fórmulas a forma normal conjuntiva.**

   a) $q \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
   b) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$
   c) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow a)$

   a) Considerando $\boldsymbol{q} \rightarrow ((\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}))) \rightarrow ((\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}))$ **teremos:**

   i. $q \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ **(equiv. Disjuntiva)**
   ii. $\neg q \vee ((p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ **(equiv. Disjuntiva)**
   iii. $\neg q \vee ((p \rightarrow (\neg q \vee r))) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r))$ **(equiv. Disjuntiva)**
   iv. $\neg q \vee ((p \rightarrow (\neg q \vee r))) \rightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r))$ **(equiv. Disjuntiva)**

v. $\left(\left(\neg q \vee \left(\left(\neg p \vee (\neg q \vee r)\right)\right)\right) \rightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r))\right)$**(equiv. Conjuntiva)**

vi. $\neg\left(\left(\neg q \vee \left(\left(\neg p \vee (\neg q \vee r)\right)\right)\right) \wedge \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r))\right)$

b) Considerando $(\neg \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{r})$ teremos:

i. $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$ **(equiv. Disjuntiva)**
ii. $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

c) Considerando $\neg(((\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{a})$ teremos:

i. $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow a)$ **(equiv. Disjuntiva)**
ii. $\neg(\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p) \vee a)$ **(equiv. Disjuntiva)**
iii. $\neg(\neg(\neg(p \rightarrow q) \vee p) \vee a)$ **(De Morgan)**
iv. $\neg((\neg\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg p) \vee a)$ **(De Morgan)**
v. $(\neg((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \wedge \neg a)$ **(equiv. Disjuntiva)**
vi. $(\neg((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \wedge \neg a)$ **(De Morgan)**
vii. $((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge \neg a)$

9. Após o falecimento do seu pai, homem sério e que nunca disse uma mentira na vida. Tônia encontra três caixas etiquetadas. Na caixa um se lê *"o dinheiro não está aqui"*. Na etiqueta da caixa dois é possível ler *"o dinheiro não está aqui"* e na caixa três há uma etiqueta que diz *"o dinheiro está na caixa 2"*. Na frente das três caixas existe uma nota do seu pai onde está escrito, em letras garrafais, *"Apenas uma etiqueta contém a verdade, as outras duas são mentiras. Apenas quem abrir a caixa certa ficará com o dinheiro"*.

Formalize o problema e determine qual caixa Tônia deve abrir.

Solução:

Se p, q e r representarem respectivamente as caixas 1, 2 e 3 de tal forma que $p \equiv$ o dinheiro está na caixa 1, $q \equiv$ o dinheiro está na caixa 2 e $r \equiv$ o dinheiro está na caixa 3 e, considerando as informações do problema teremos:

a) Como apenas uma caixa contém o dinheiro teremos:

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

b) Como apenas uma mensagem é verdadeira:

b.1 – Se a primeira mensagem é verdadeira as outras duas são falsas e o dinheiro não está na caixa 1. Logo: $(\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg q)$;

b.2 – Se a segunda mensagem é verdadeira teremos: $(\neg\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q)$

b.3 – Se a terceira mensagem é verdadeira teremos: $(\neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge q)$

$$(\neg p \land \neg\neg q \land \neg q) \lor (\neg\neg p \land \neg q \land \neg q) \lor (\neg\neg p \land \neg\neg q \land q)$$
$$(F) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land q)$$
$$(p \land \neg q) \lor (p \land q)$$

Agora podemos fazer uma tabela verdade:

p	q	r	$(p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r)$	$(p \land \neg q) \lor (p \land q)$
T	T	T	F	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	F	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

A única possiblidade que satisfaz as duas fórmulas é $p \equiv T$, $q \equiv F$ e $r \equiv F$ logo Tânia deve abria a caixa um.